周辺回転端直角二等辺三角形板のたわみ振動

若 杉 昇 八

Lateral Vibration of a Right-angle Isoceles Triangular Plate with Simply Supported Edges

Shōhachi WAKASUGI

Concerning the present theme, no other research has yet been found. When the plate is loaded uniformly in the plane of medium surface, the differential equation (1) (or(5)) of the deflection surface of the plate is solved exactly by using the deflection form of Eq. (9).

For the general case as shown in Fig. 1, differential equation (1) (or(5)) is solved by Galerkin's method using the deflection form as Eq. (12). The results are shown in Fig.2 and 3. The full lines in these figures show the values calculated by using four terms w_{21}, w_{31}, w_{32} and w_{41} in Eq. (12); and broken line will show the values when we use the more terms than the former case.

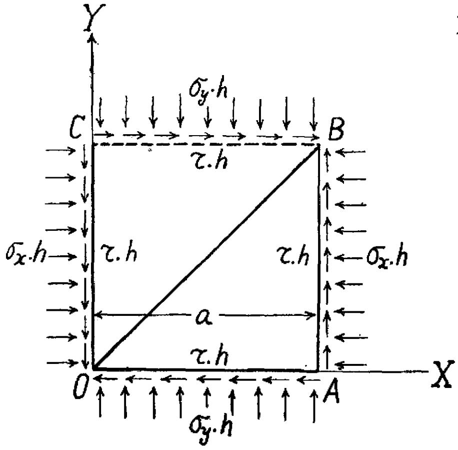
1. 緒 言

筆者は先に周辺回転端直角二等辺三角形板の座屈[1]について解析を行なつた。本論文はこの前論文における方法を用いて，同じ三角形板たわみ固有振動数および周辺力による振動数の変化を求めたものである。

2. 基礎関係式

一般に周辺に沿うて，圧縮力 σ_x.h, σ_y.h およびせん断力 τ·h (h：板厚) を受けて横方向の微小たわみWを生じて振動するときの運動方程式は，

第 1 図



$$D\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)^2 W+\sigma_x h\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}+\sigma_y h\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}-2\tau h\frac{\partial^2 W}{\partial X\partial Y}+\rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

たゞし D=曲げ剛性=$Eh^3/12(1-\nu^2)$

E：縦弾性係数　ν：ポアソン比

ρ：密度

こゝにσ_x, σ_y, τ は第1図に示す方向を正とする。周辺回転端の条件は直線境界に対しては次式を採用出来る。

$$W=0,\quad \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}=0 \tag{2}$$

次に

$$W=w\cos(pt+\varepsilon) \tag{3}$$

とおく。こゝにpは振動率である。また，計算の簡単のため次

のごとき座標変換を行なつておく。

$$\frac{\pi}{a}X=x,\ \frac{\pi}{a}Y=y \tag{4}$$

すると(1)(2)は夫々次の(5)(6)のごとくなる。

$$\triangle\triangle w+P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+Q\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2R\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\mu^2 w=0 \tag{5}$$

$$\text{境界条件}：w=0,\ \triangle w=0 \tag{6}$$

たゞし
$$\left\{\begin{array}{l} \triangle=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ P=\dfrac{\sigma_x}{\sigma_e},\ Q=\dfrac{\sigma_y}{\sigma_e},\ R=\dfrac{\tau}{\sigma_e};\ \sigma_e=\dfrac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)}\left(\dfrac{h}{a}\right)^2 \\ \mu^2=\rho p^2/D \end{array}\right. \tag{7}$$

特に(5)において$\mu=0$とおけば，座屈荷重を求めるときの平衡方程式となることは明らかである。

3. 均等外圧を受ける場合

このときは，$P=Q$，$R=0$にて(5)は次のごとくなる。

$$\triangle\triangle w+P\triangle w-\mu^2 w=0 \tag{8}$$

さて直角を夾む二辺の長さがπなる周辺回転端直角二等辺三角形板のたわみ形として，

$$w_{mn}=\sin mx\sin ny-\sin nx\sin mx \tag{9}$$

を採用すると，境界条件(6)を満足することを，前論文[1]において指摘した。こゝにm，nは互に相異なる正の整数にて，一般性を失うことなしに$m>n$と仮定できる。

いま $w=a_{mn}w_{mn}$ として(8)へ代入すると，

$$\{(m^2+n^2)^2-P(m^2+n^2)-\mu^2\}w=0$$

これより

$$\mu^2=(m^2+n^2)^2-P(m^2+n^2) \tag{10}$$

すなわち，w_{mn}は(6)なる境界条件のもとにおける(8)の固有かん数にて，(10)は固有値である。換言すれば(9)は固有振動波形を与え，(10)は固有振動数を与える方程式である。然して，固有振動の最小値すなわちμ^2に最小値を与える基本振動は，明らかに$m=2$，$n=1$の場合である。すなわち

$$\mu^2=25-5P \tag{11}$$

特に$\mu=0$とおけば$P=5$なる座屈荷重を得る。(11)をぐらふにて示せば，第2図の$\alpha=1$なる直線にて表わされる。然して以上に得られた値はすべて正確である。

4. 一般の場合

均等外圧以外の周辺力をうける場合に，(5)(6)を，厳密に解くことは殆んど不可能である。よつてこゝでは Galerkin 法[2]を用いて解くことにする。すなわちたわみ形を(9)を用いて

$$=\sum_{(pq)}a_{pq}w_{pq} \tag{12}$$

のごとく表わし，次式を計算する。

$$\iint w_{mn}\left[\triangle\triangle\left(\sum_{(pq)}a_{pq}w_{pq}\right)+P\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{(pq)}a_{pq}w_{pq}\right)+Q\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sum_{(pq)}a_{pq}w_{pq}\right)\right.$$
$$\left.-2R\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\sum_{(pq)}a_{pq}w_{pq}\right)-\mu^2\sum_{(pq)}a_{pq}w_{pq}\right]dxdy=0 \tag{13}$$

たゞし $\sum_{(pq)}$ は(p,q)の組合せについて均等外圧の場合に低次振動を与えるものより順に，近似の程度に応じて何項か集めることを意味し，また積分は板の全面にわたつて積分することを意味する。(13) のw_{mn}は(12)に用いた w_{pq} の中から順に一つづゝ用いるものとし，従つて(13)は用いた項の数だけの連立一次方程式となる。

さて実際に(9)(12)を用いて(13)を計算すれば次のごとくなる。たゞし簡単のため，両辺を32で除し，かつ $k=\pi^2/128$ とおいてある。

$$\left\{k(m^2+n^2)^2-\frac{k}{2}(m^2+n^2)(\mathrm{P}+\mathrm{Q})-\frac{1}{4}\,\frac{1-(-1)^{m+n}}{2}\,\frac{m^2n^2}{m^2+n^2}\mathrm{R}-k\mu^2\right\}a_{mn}$$

$$-\sum_{(pq)}{}'\left\{(m^2-n^2)(p^2-q^2)(\mathrm{P}-\mathrm{Q})\mathrm{A}_{mn,pq}+nmpq\,\mathrm{B}_{mn,pq}\,\mathrm{R}\right\}a_{pq}=0 \tag{14}$$

こゝに $\sum_{(pq)}{}'$ は$(m=p,\ n=q)$ なる場合を除いて，(pq) の組合せについて集めることを意味する。また $\mathrm{A}_{mn,pq}$，$\mathrm{B}_{mn,pq}$ は次のごときものである。(たゞし$m=p$，$n=q$の場合を除く。)

$$\begin{cases} \text{i)}\ m+n+p+q = \text{偶数の場合；}\ \mathrm{A}_{mn,pq}=0 \\ \text{ii)}\ m+n+p+q = \text{奇数の場合；} \\ \quad \mathrm{A}_{mn,pq}=\dfrac{m\,n\,p\,q}{\{(m+n)^2-(p+q)^2\}\{(m+n)^2-(p-q)^2\}\{(m-n)^2-(p+q)^2\}\{(m-n)^2-(p-q)^2\}} \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} \text{i)}\ m+n+p+q = \text{奇数の場合；}\ \mathrm{B}_{mn,pq}=0 \\ \text{ii)}\ m+n+p+q = \text{偶数の場合；} \\ \quad \text{a)}\ m,n,p,q\text{の中何れか二が等しい場合(勿論}m\neq n,p\neq q\text{)；}\mathrm{B}_{mn,pq}=\dfrac{1}{4}\,\dfrac{1-(-1)^{m+n}}{2}\,\dfrac{1}{(m^2-n^2)(p^2-q^2)} \\ \quad \text{b)}\ m,n,p,q\ \text{すべて互に相異なる場合；} \\ \quad \mathrm{B}_{mn,pq}=\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1-(-1)^{m+p}}{2}\,\dfrac{1}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)}-\dfrac{1-(-1)^{m+q}}{2}\,\dfrac{1}{(m^2-q^2)(n^2-p^2)}\right\} \end{cases} \tag{16}$$

なほ(15)(16)より次の関係を得る。

$$\mathrm{A}_{mn,pq}=\mathrm{A}_{pq,mn}\ ,\ \mathrm{B}_{mn,pq}=\mathrm{B}_{pq,mn} \tag{17}$$

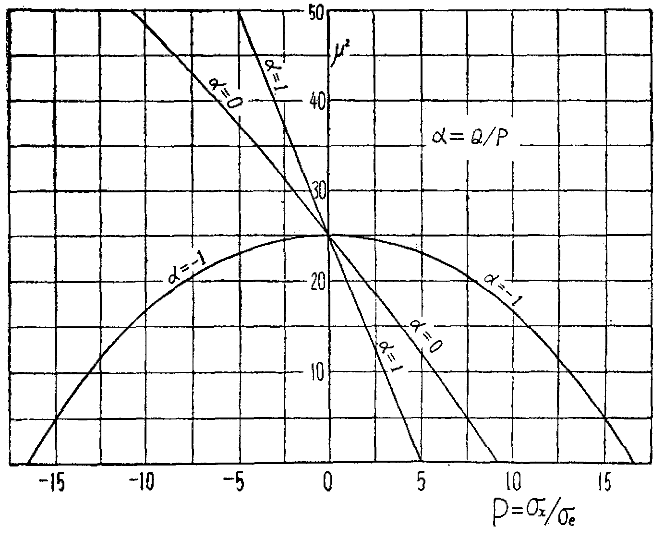
さて(14)の連立一次方程式においてすべての a_{mn} が同時には0でない条件を作れば，固有振動数を定める行列式すなわち振動数方程式を得る。この際(14)(17)を参照すれば行列式は対称となり，従つて根μ^2はすべて実根なることがわかる。その中意味のあるのは$\mu^2>0$すなわち正根のみである。以下において，実際に上述の計算を行い最低次の固有振動数を求めよう。

さて(14)の始め数項を示せば次の如くである。たゞし簡単のため最上段の a_{mn} の下に係数のみを並べて書いてある。

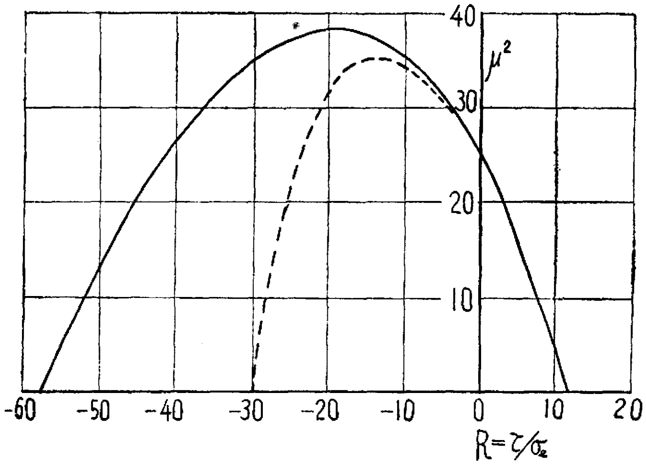
$$\begin{array}{lllll} \quad a_{21} & \quad a_{31} & \quad a_{32} & \quad a_{41} & \\ 5^2k-\frac{5}{2}k(\mathrm{P}+\mathrm{Q})-\left(\frac{1}{3}\right)^2\mathrm{R}-k\mu^2 & \frac{16}{175}(\mathrm{P}-\mathrm{Q}) & -\frac{1}{5}\mathrm{R} & -\frac{2}{45}\mathrm{R} & \cdots\cdots=0 \\ \frac{16}{175}(\mathrm{P}-\mathrm{Q}) & 10^2k-\frac{10}{2}k(\mathrm{P}+\mathrm{Q})-k\mu^2 & \frac{16}{189}(\mathrm{P}-\mathrm{Q}) & \frac{32}{147}(\mathrm{P}-\mathrm{Q}) & \cdots\cdots=0 \\ -\frac{1}{5}\mathrm{R} & \frac{16}{189}(\mathrm{P}-\mathrm{Q}) & 13^2k-\frac{13}{2}k(\mathrm{P}+\mathrm{Q})-\left(\frac{3}{5}\right)^2\mathrm{R}-k\mu^2 & \frac{2}{7}\mathrm{R} & \cdots\cdots=0 \\ -\frac{2}{45}\mathrm{R} & \frac{32}{147}(\mathrm{P}-\mathrm{Q}) & \frac{2}{7}\mathrm{R} & 17^2k-\frac{17}{2}k(\mathrm{P}+\mathrm{Q})-\left(\frac{2}{15}\right)^2\mathrm{R}-k\mu^2 & \cdots=0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \end{array} \tag{18}$$

特に$P=Q$の場合すなわち均等外圧とせん断力が作用する場合には，$m+n+p+q=$偶数又は奇数によつて上式は二群の方程式に分れることは前論文[1]におけると全く同様である。そして一般に$m+n+p+q=$奇数の場合に小さい最低固有振動を与えるものと考えられる。

第 2 図



第 3 図



さて(18)より一項のみを用いると，

$$25k-\frac{5}{2}k(P+Q)-\frac{1}{9}R=k\mu^2$$

即ち

$$\mu^2=25-2{\cdot}5(P+Q)-1{\cdot}441R \quad (19)$$

之は$P\approx Q$，$R\approx 0$の附近ではよい近似値を与える。更に多くの項をとれば広い範囲にわたつてよりよい近似式を得る。いまこのごとくしてP,Q,Rとμ^2の関係を求めたとし，第2，3図のごとくぐらふに表わしたとすれば，すべての曲線は縦軸の$\mu^2=25$の点を通り之は正確値である。また横軸を切る点は$\mu=0$ 従つて$p=0$すなわち座屈荷重を与える点である。従つて横軸を切る点がよい近似値であるならば，縦軸を切る点が正確値であるゆえ，その他の点もよい近似値であろうと思われる。然して前論文[1]において詳述したごとく，四項まで用いると$P,Q\approx 0;R<0$の附近では誤差が大きいけれども他の部分では相当に良好な座屈荷重の近似値を与え，かつ計算式も比較的簡単である。従つて本論文においても四項まで用いてμ^2を計算することにする。かくして得られた主な結果を第2，3図に示す。第3図の破線は前述の如く$R<0$では誤差が大きいので，前論文におけるごとく曲線が横軸を-30にて切るものと仮定して画いた推定補正曲線である。

5. 結　　び

周辺に種々の荷重をうける周辺回転端直角二等辺三角形板のたわみ振動の最低次固有振動数を求めた。設計などの際の資料となし得るであろう。又少しく工夫すれば高次振動の振動数も求めることが出来る。この際振動数が簡単な整数比をなさないことは，一般の形の板，膜の振動と同様である。尚振動波形は前論文の第2図などを参照されたい。

註、

1) 著者；周辺回転端直角二等辺三角形板の座屈
　　機械学会論文集　19巻 83号 59頁（昭28）

2) 例えば；弾性安定要覧，62頁参照